

TD n° 4 : Tendance linéaire

Exercice 1. Le tableau de données ci-dessous représente les notes attribuées par deux juges à dix sportifs lors d'une compétition.

Sportif	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Juge 1	72	65	80	84	74	68	82	68	76	71
Juge 2	76	63	84	87	79	69	81	71	73	77

1. Représenter le nuage des dix sportifs.
2. Calculer la moyenne arithmétique et la variance des notes de chacun des deux juges.
3. Calculer la covariance entre les deux notes des deux juges.
4. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux notes.
5. Tester l'indépendance des notes des deux juges.
6. Donner l'équation de la droite de régression de X en Y .
7. Donner l'équation de la droite de régression de Y en X .
8. Quelle note attribue le juge 2 à quelqu'un qui a été noté 87 par le juge 1 ?
9. Quelle note attribue le juge 1 à quelqu'un qui a été noté 80 par le juge 2 ?

Exercice 2. Dans un échantillon de 18 personnes, on prend note du poids (X , en kg) et du taux de cholestérol (Y , en mg par 100 ml de sang). Voici les données:

X	Y	X	Y	X	Y
50	262	72	281	93	277
56	250	76	293	94	300
58	265	78	271	95	305
64	280	82	261	101	310
64	264	82	296	104	286
68	256	86	268	108	301

On donne:

$$\sum x_i = 1431, \quad \sum y_i = 5026, \quad \sum x_i^2 = 118895, \quad \sum y_i^2 = 1409064, \quad \sum x_i y_i = 403552$$

1. Calculer le coefficient de corrélation.
2. Déterminer la droite des moindres carrés.
3. Tester l'hypothèse selon laquelle le taux de cholestérol et le poids sont indépendants.

Exercice 3. Le tableau ci-dessous présente des données sur la concentration Y (mg/ml) d'un médicament dans le sang à la durée X (en heures) depuis son absorption.

X	Y	X	Y	X	Y
0.5	0.0916	3.5	0.0523	6.5	0.0255
1	0.0898	4	0.0384	7	0.0235
1.5	0.0805	4.5	0.0376	7.5	0.0231
2	0.059	5	0.0317	8	0.0196
2.5	0.0578	5.5	0.0308	8.5	0.0167
3	0.0534	6	0.0293	9	0.0166

On donne:

$$\sum x_i = 85.5, \quad \sum y_i = 0.7772, \quad \sum x_i^2 = 527.25, \quad \sum y_i^2 = 0.0437, \quad \sum x_i y_i = 2.64$$

$$\sum \log(y_i) = -59.195, \quad \sum x_i \log(y_i) = -305.98, \quad \sum [\log(y_i)]^2 = 199.908.$$

Modèle linéaire

1. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y .
2. Déterminer la droite des moindres carrés.
3. En déduire une estimation de la concentration du médicament 8 heures après la consommation. Calculer ensuite l'écart à la concentration observée à cette durée.
4. Donner une prédiction de la concentration 9 heures et 15 minutes après la consommation.

Modèle exponentielle

La théorie dit que la concentration Y est liée à la durée X depuis l'absorption par une équation de la forme $Y = ae^{-bX}$. Pour cela, on transforme la variable Y en une variable Y' qui est linéaire en X . C'est la transformation logarithmique qui a cet effet. Donc la variable $Y' = \log(Y)$ s'exprime comme fonction linéaire $Y' = a' + b'X$.

1. Exprimer a' en fonction de a , puis b' en fonction de b .
2. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y' .
3. Déterminer a' et b' , les coefficients de la droite de régression entre Y' et X .
4. Déterminer les paramètres a et b de l'équation exponentielle $Y = ae^{-bX}$.
5. (a) Utiliser l'équation pour estimer la concentration du médicament 8 heures après la consommation.
(b) Calculer ensuite l'écart re à la concentration observée à cette durée.
(c) Comparer avec l'écart obtenu avec le modèle linéaire.
6. Donner une prédiction de la concentration 9 heures et 15 minutes après la consommation.